Kostenrechnung aus mathematischer Sicht

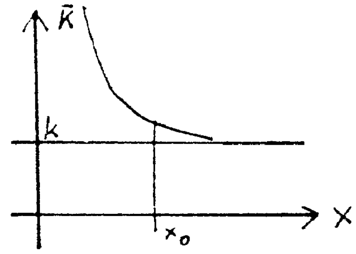
HR Dr.Helmut Brunner

Einfachster Fall: Betrieb mit einfacher Produktion (ein einziges Produkt wird erzeugt)

In einer bestimmten Produktionsperiode wird die Menge x (Mengeneinheit) hergestellt, wodurch Gesamtkosten K entstehen:
$K = K(x)$. Ansatz für $K(x)$: $K = F + kx$
F: fixe Kosten (Abschreibung für Anlagen, div.Steuern, Miete,usw.)
k: prop.Kosten je Mengeneinheit (Fertigungslohn, Material, Energie)
Aufgrund der vorhandenen Ausstattung (Kapazität) kann in der zugrundegelegten Periode eine bestimmte Höchstmenge x_o produziert werden.

Die Durchschnittskosten $\overline{K} = \frac{K}{x} = \frac{F}{x} + k$ sind umso kleiner, je mehr produziert wird.
Daher: $\mathrm{Min}(\overline{K}) = \overline{K}(x_o) = \frac{F}{x_o} + k$

$$\lim_{x \to \infty} \overline{K}(x) = k \quad \text{(s.Abb.1)}$$



Die lineare Funktion $K = F + kx$ kann auf 2 Arten bestimmt werden:

1. Man versucht eine genaue Zusammenstellung aller fixen und proportionalen Kosten aus den Zahlen der Buchhaltung.

2. Man ermittelt in verschiedenen Perioden (verschiedener Länge) aus den Zahlen der Buchhaltung lediglich die Gesamtkosten. Die Kostenfunktion bestimmt man hierauf als lineare Regression.

Der zweiten Methode ist jedenfalls der Vorzug zu geben, weil sie einen statistischen Mittelwert über mehrere Perioden liefert und daher auch Vorhersagen über künftige Produktionsperioden realistischer sein werden.

Ausgangsmaterial ist also eine Tabelle:

x_1	x_2	$\dots x_n$
K_1	K_2	K_n

Nun sei $K = F + kx$

Zu $x_1, x_2, \dots x_n$ gehören dann die <u>berechneten</u> Kosten:

$$F + kx_1,\ F + kx_2,\ \dots\dots F + kx_n$$

Nun bildet man die Summe der "Fehlerquadrate" $\sum_{i=1}^{i=n}(F+kx_i-K_i)^2$, welche man als Funktion von F und k auffaßt und verlangt, daß diese Summe ein Minimum wird:

$$f(F,k) = \sum_{i=1}^{n}(F+kx_i-K_i)^2 \rightarrow \text{Min!}$$

Aus $\frac{\partial f}{\partial F} = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial k} = 0$ erhält man ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung von F und k.

Führt man die arithmetischen Mittel $\bar{x} = \sum_{i=1}^{i=n} x_i/n$ und $\bar{K} = \sum_{i=1}^{i=n} K_i/n$ ein, so erhält man:

$$k = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i K_i - n\bar{x}\bar{K}\right) / \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)$$

und für K(x) schließlich die Gleichung:

$$K(x) = \bar{K}+k(x-\bar{x}) = kx+(\bar{K}-k\bar{x}),$$

so daß man für die fixen Kosten erhält:

$$F = \bar{K} - k\bar{x}.$$

Für die praktische Berechnung benötigt man eine Tabelle folgender Art:

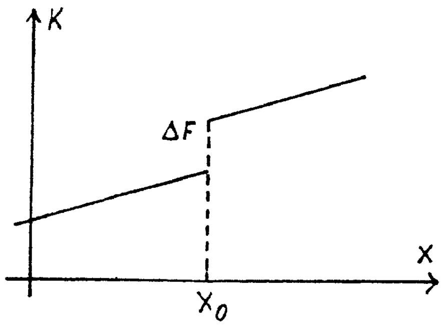
x	K	xK	x^2
...	...	...	...
...	...	...	...

Aus den Summen dieser vier Spalten berechnet man schließlich alle Größen, die in den Formeln für k und F vorkommen.

<u>Kapazitätsvergrößernde Investitionen</u>:

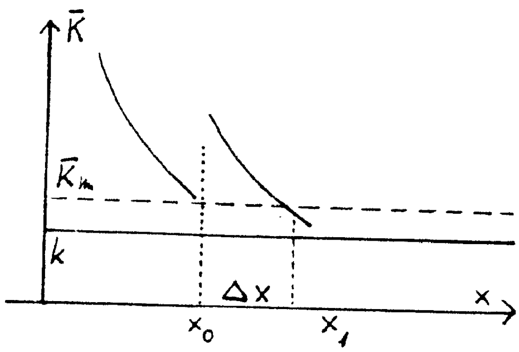
Wird eine Investition durchgeführt, die zu einer Erhöhung der Kapazität führt, so bedeutet dies für die fixen Kosten eine sprunghafte Erhöhung um einen Betrag ΔF (Unstetigkeit der Kostenfunktion!).

Abb.2



Für die Durchschnittskosten $\overline{K}(x)$ sieht dies so aus:

Abb.3



Wie aus Abb.3 ersichtlich, muß mindestens die zusätzliche Menge Δx produziert werden, damit die Durchschnittskosten $\overline{K}$ nach der Investition genauso niedrig sind wie im bisherigen Optimum x_o.

$\overline{K}(x_o) = (F+kx_o)/x_o = \frac{F}{x_o} + k$ vor der Investition

$\overline{K}(x_1) = (F^*+kx_1)/x_1 = \frac{F^*}{x_1} + k$ nach der Investition

$\overline{K}(x_1) = \overline{K}(x_o) \Leftrightarrow \frac{F}{x_o} = \frac{F^*}{x_1} \Leftrightarrow$

$$x_1 = \frac{f+\Delta F}{F} \cdot x_o \quad (F^* = F+\Delta F)$$

$$x_1 = (1+\frac{\Delta F}{F})\, x_o$$

bzw. $\Delta x = x_1 - x_o = \frac{\Delta F}{F}\, x_o$

bzw. $\frac{\Delta x}{x_o} = \frac{\Delta F}{F}$,

d.h.: die Produktionssteigerung nach der Investition muß prozentuell gleich hoch sein, wie die prozentuelle Zunahme der fixen Kosten infolge der Investition. Gerade dieser einfache

Zusammenhang wurde in der Vergangenheit von vielen Betrieben nicht beachtet, so daß sich oft nach größeren Investitionen eine ungünstigere Kostenstruktur und damit eine verschlechterte Ertrags- und Wettbewerbssituation ergab.

Mehrfache Produktion:

Ein Betrieb erzeugt die Produkte A_1, A_2, ...A_n auf den Maschinenaggregaten M_1, M_2, ...M_m. Die Bearbeitungszeiten je Mengeneinheit sind in einer "Produktionsmatrix" (aik) erfaßt (Durchschnittswerte), die Kapazitäten in einer gegebenen Produktionsperiode sind b_1, b_2, ...b_n. Von den Produkten werden die Mengen x_1, x_2, ...x_n erzeugt. Der Deckungsbeitrag je Mengeneinheit (Verkaufspreis - variable Kosten) sei d_1, d_2, ...d_n.
Dann stellt sich folgendes Problem:
Welche Mengen soll man von den einzelnen Produkten in der vorgegebenen Produktionsperiode herstellen, damit der Gesamtdeckungsbeitrag $Z = d_1x_1 + d_2x_2 + \ldots d_nx_n$ ein Maximum wird?

Als Nebenbedingungen treten infolge der benötigten Arbeitszeiten und Kapazitäten folgende lineare Ungleichungen auf:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Faßt man die x_i zu einem Vektor $\vec{x}$ und die b_i zu einem Vektor $\vec{b}$ zusammen, so läßt sich das Problem so formulieren:

$$A\,\vec{x} \leq \vec{b}$$

$$Z = \vec{d}\,\vec{x} \rightarrow \text{Maximum}$$

$\vec{d}$: Vektor aus den d_i
A: Matrix der a_{ik}

Die Lösung dieses Problems erfolgt mit der Simplex-Methode,die an einem einfachen Beispiel erläutert werden soll:

1. Die Ungleichungen werden zuerst durch Einführung von "Schlupfvariablen" in Gleichungen umgewandelt.
2. Nach Auswahl der "Eingangsspalte" wählt man die "Eingangszeile" nach dem Prinzip: Elemente der letzten Spalte/Elemente der Eingangsspalte; kleinster Quotient bestimmt die Eingangszeile.
3. Division der Eingangszeile durch das "Kreuzungselement".
4. Mit Hilfe dieser so entstandenen Zeile formt man die Matrix so um, daß an der Stelle der früheren Eingangsspalte ein Einheitsvektor entsteht.

$$x_1+2x_2+3x_3 \leq 6 \qquad x_1+2x_2+3x_3+x_4 = 6$$
$$2x_1+x_2+x_3 \leq 4 \qquad 2x_1+x_2+x_3+x_5 = 4$$
$$Z = 5x_1+3x_2+4x_3 \rightarrow \text{Max!}$$

		↓							
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			
	x_4	1	2	3	1	0	6		6:1 = 6
→	x_5	[2]	1	1	0	1	4	←	4:2 = 2 Min!
	Z	-5	-3	-4	0	0	0		
		↑							

				↓					
		x_5	x_2	x_3	x_4	x_5			
→	x_4	0	1.5	[2.5]	1	-0.5	4	←	4:2.5 = 1.6 Min!
	x_1	1	0.5	0.5	0	0.5	2		
	Z	0	-0.5	-0.5	0	2.5	10		
				↑					

	x_5	x_2	x_4	x_4	x_5	
x_3	0	0.6	1	0.4	-0.2	1.6
x_1	1	0.2	0	-0.2	0.6	1.2
Z	0	0.4	0	0.6	2.2	12.4

$x_1 = 1.2 \qquad x_2 = \emptyset \qquad x_3 = 1.6 \qquad Z_{max} = 12.4$